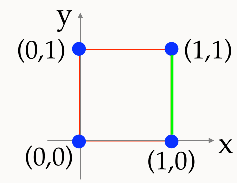
Mapas de Karnaugh

Circuitos Digitales EC1723

Universidad Simón Bolívar
Departamento de Electrónica y Circuitos
Prof. Juan. C. Regidor

Representación gráfica

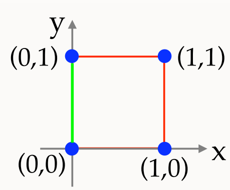
- Representación gráfica de los mintérminos (o maxtérminos) de dos variables.



- Si una función de *x* e *y* incluye, por ejemplo, los mintérminos 2 y 3, podemos aplicar el teorema de combinación para eliminar un literal: $x{\cdot}y'+x{\cdot}y = x$
- En la gráfica, estos mintérminos se encuentran en el lado marcado en verde, que corresponde al literal *x*. El segmento (0,0)-(1,0) corresponde al literal y'.

Distancia

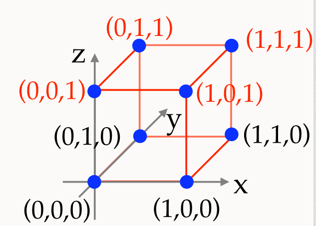
- La distancia entre dos mintérminos es el número de segmentos que se recorren para llegar de un punto a otro



- La distancia entre (0,0) y (0,1) es 1
- La distancia entre (0,1) y (1,0) es 2
- Si la distancia entre dos mintérminos es 1, se dice que son adyacentes. Si ambos están presentes en una función, puede aplicarse el teorema de combinación y eliminar un literal.

Distancia

- Los mintérminos de 3 variables pueden representarse como los vértices de un cubo.

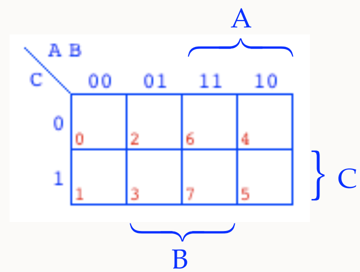


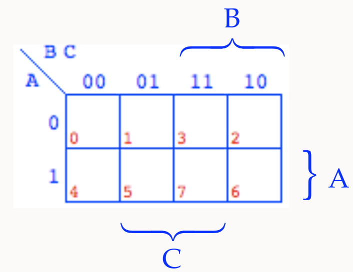
- Una arista del cubo representa al producto de dos literales, pues se elimina una variable por combinación.
- Una cara del cubo representa a un literal. El T. de combinación permite eliminar 2 variables. Ejemplo: $x'{\cdot}y'{\cdot}z + x{\cdot}y'{\cdot}z + x{\cdot}y{\cdot}z + x'{\cdot}y{\cdot}z = y'{\cdot}z + y{\cdot}z = z$

Métodos de minimización

- Estas ideas de distancia, adyacencia y eliminación de variables por combinación se pueden extender a dimensiones mayores, y son la base de los métodos prácticos de minimización de funciones lógicas:
  - Mapa de Karnaugh, propuesto en 1953, permite el tratamiento manual de funciones de 2 a 6 variables.
  - Algoritmo de Quine-McCluskey, propuesto por W. V. Quine en 1955 y modificado por E. J. McCluskey en 1956; usado por programas de computadora, permite minimizar funciones de cualquier tamaño.

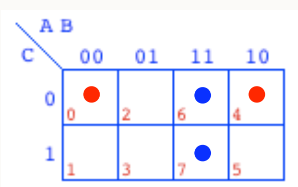
Mapa de Karnaugh de 3 Variables

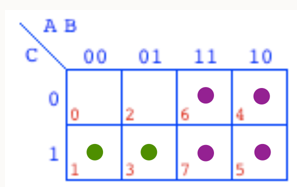




Mapa de 3 Variables (mintérminos)

- Los puntos del mismo color indican recuadros adyacentes.





m0 + m4 = B′.C′

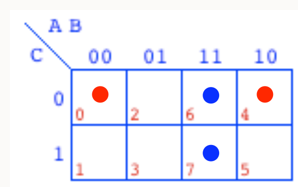
m1 + m3 = A′.C

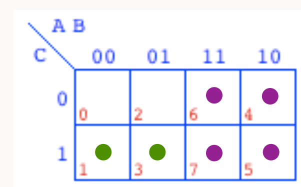
m6 + m7 = A.B

m4 + m5 + m6 + m7 = A

Mapa de 3 Variables (Maxtérminos)

- Los puntos del mismo color indican recuadros adyacentes.





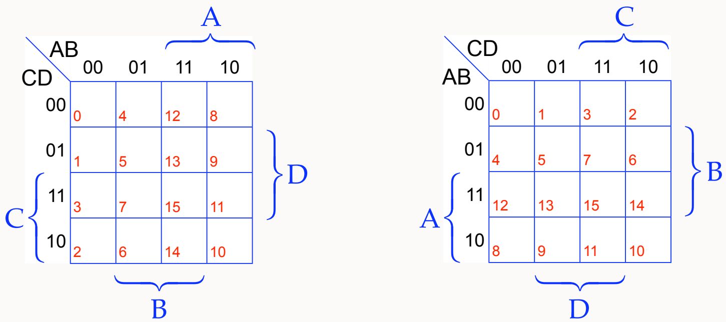
M0 . M4 = B+C

M1 . M3 = A+C′

M6 . M7 = A′+B′

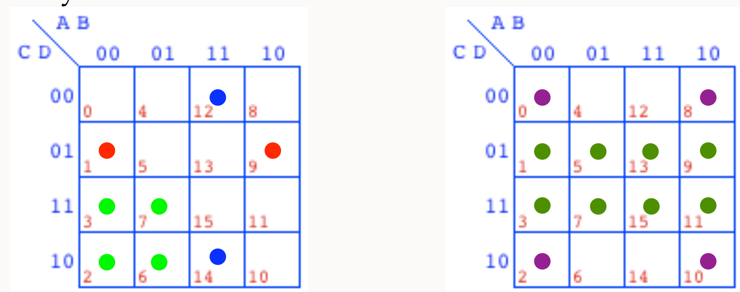
M4 . M5 . M6 . M7 = A′

Mapa de Karnaugh de 4 Variables



Mapa de 4 Variables (mintérminos)

- Los puntos del mismo color indican recuadros adyacentes.



m12 + m14 = A.B.D′

m1 + m9 = B′.C′.D

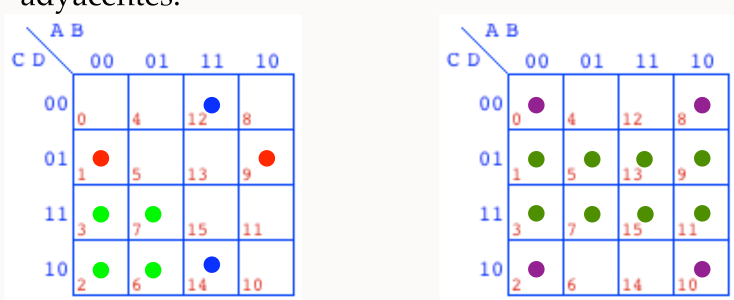
m2 + m3 + m6 + m7 = A′.C

m0 + m2 + m8 + m10 = B′.D′

∑m(1,3,5,7,9,11,13,15) = D

Mapa de 4 Variables (Maxtérminos)

- Los puntos del mismo color indican recuadros adyacentes.



M12 . M14 = A′+B′+D

M1 . M9 = B+C+D′

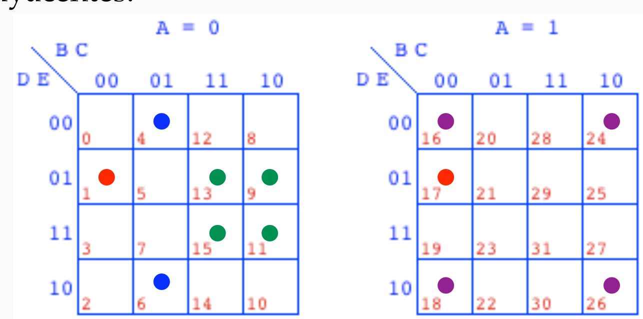
M2 . M3 . M6 . M7 = A+C′

M0 . M2 . M8 . M10 = B+D

∏M(1,3,5,7,9,11,13,15) = D′

Mapa de 5 Variables (mintérminos)

- Los puntos del mismo color indican recuadros adyacentes.



m4 + m6 = A′.B′.C.E′

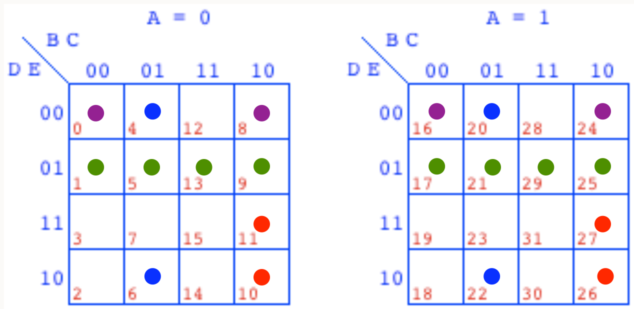
∑m(9,11,13,15) = A′.B.E

∑m(16,18,24,26) = A.C′.E′

m1 + m17 = B′.C′.D′.E

Mapa de 5 Variables (mintérminos)

- Los puntos del mismo color indican recuadros adyacentes.

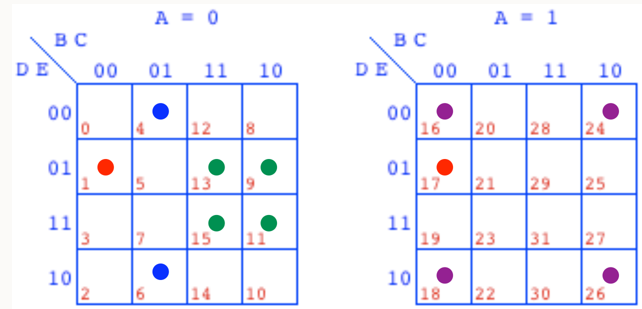


$\sum m(4,6,20,22) = B'.C.E'$ $\sum m(1,5,9,13,17,21,25,29) = D'.E$

$\sum m(10,11,26,27) = B.C'.D$ $\sum m(0,8,16,24) = C'.D'.E'$

Mapa de 5 Variables (Maxtérminos)

- Los puntos del mismo color indican recuadros adyacentes.

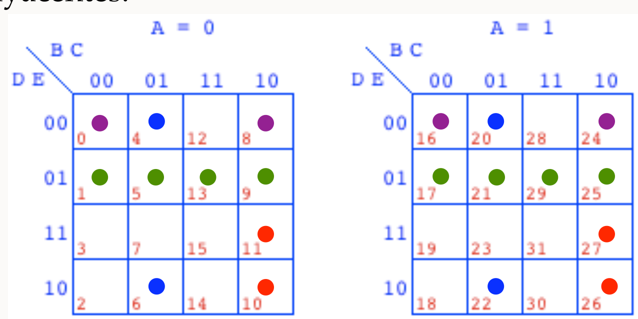


$M4 . M6 = A+B+C'+E$ $\prod M(16,18,24,26) = A'+C+E$

$\prod M(9,11,13,15) = A+B'+E'$ $M1 . M17 = B+C+D+E'$

Mapa de 5 Variables (Maxtérminos)

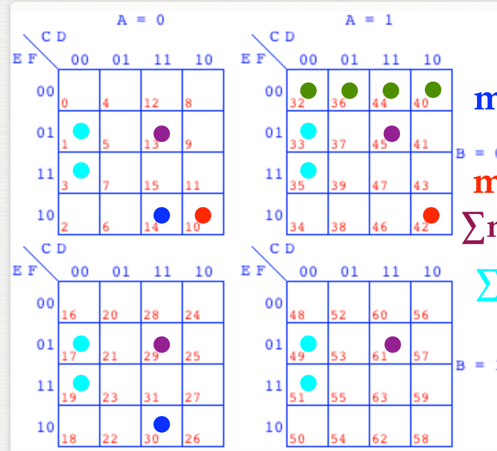
- Los puntos del mismo color indican recuadros adyacentes.



$\prod M(4,6,20,22) = B+C'+E$ $\prod M(1,5,9,13,17,21,25,29) = D+E'$

$\prod M(10,11,26,27) = B'+C+D'$ $\prod M(0,8,16,24) = C+D+E$

Mapa de 6 Variables (mintérminos)



$m14+m30 = A'.C.D.E.F'$

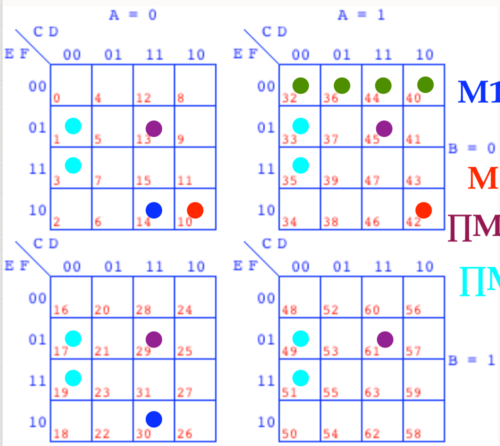
$m10+m42 = B'.C.D'.E.F'$

$\sum m(13,29,45,61) = C.D.E'.F$

$\sum m(1,3,17,19,33,35,49,51) = C'.D'.F$

$\sum m(32,36,40,44) = A.B'.E'.F'$

Mapa de 6 Variables (Maxtérminos)



$M14+M30 = A+C'+D'+E'+F$

$M10+M42 = B+C'+D+E'+F$

$\prod M(13,29,45,61) = C'+D'+E+F'$

$\prod M(1,3,17,19,33,35,49,51) = C+D+F'$

$\prod M(32,36,40,44) = A'+B+E+F$

Minimización de funciones con Mapas de Karnaugh

- Implicante: grupo de mintérminos o maxtérminos adyacentes.
- Implicante primo: es aquel que no está contenido en otro.
- Implicante primo esencial: un implicante que cubre a un m o M que no aparece en ningún otro implicante

Minimización de funciones con Mapas de Karnaugh

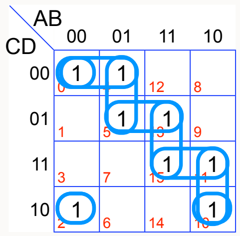
CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1 (4)	12	8
01	1	1 (5)	1 (13)	9
11	3	1 (7)	1 (15)	11
10	2	6	14	10

- El mapa contiene 11 implicantes: 5 mintérminos, 5 pares de mintérminos, y un grupo de 4 mintérminos
- Hay dos implicantes primos: m4+m5 y $\sum m(5,7,13,15)$
- Ambos implicantes primos son esenciales.

Minimización de funciones con Mapas de Karnaugh

- Para obtener una expresión mínima a partir del mapa de Karnaugh:
  - Tomar todos los implicantes primos esenciales
  - Completar la cobertura de términos de la función usando la menor cantidad posible de implicantes primos no esenciales
  - Se debe dar prioridad a aquellos implicantes que contengan el menor número de literales

Minimización de funciones con Mapas de Karnaugh



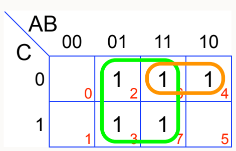
- El mapa contiene 8 implicantes primos.
- No hay ningún implicante esencial.

Minimización de funciones con Mapas de Karnaugh

- Si no existe ningún implicante esencial, se toma uno cualquiera como si lo fuera y se procede a partir de él
- En cualquier caso es posible que existan varias expresiones diferentes con la misma complejidad

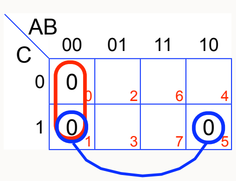
Ejemplos

- Minimizar $F(A,B,C) = \sum m(2, 3, 4, 6, 7)$



$F(A,B,C) = B + A \cdot C'$

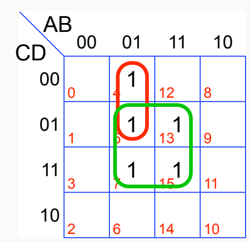
- Minimizar $F(A,B,C) = \prod M(0, 1, 5)$



$F(A,B,C) = (A + B) \cdot (B + C')$

Ejemplos

- Minimizar $F(A,B,C,D) = \sum m(4, 5, 7, 13, 15)$



$F(A,B,C,D) = B \cdot D + A' \cdot B \cdot C'$

Ejemplos

- Reducir
  $F(A,B,C,D) = \prod M(0, 1, 2, 4, 5, 8, 10)$

  $F(A,B,C,D) = (A+C)\cdot(B+D)$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0 (0)	0 (4)	(12)	0 (8)
01	0 (1)	0 (5)	(13)	(9)
11	(3)	(7)	(15)	(11)
10	0 (2)	(6)	(14)	0 (10)

Ejemplos

- Reducir
  $F(A,B,C,D) = \prod M(0, 1, 2, 4, 5, 8, 10)$

  $F(A,B,C,D) = (A+C)\cdot(B+D)$

CD \ AB	00	01	11	10
00	0 (0)	0 (4)	(12)	0 (8)
01	0 (1)	0 (5)	(13)	(9)
11	(3)	(7)	(15)	(11)
10	0 (2)	(6)	(14)	0 (10)

- Reducir $F(A,B,C,D) = \sum m(3,6,7,9,11,12,13,14,15)$

  $F(A,B,C,D) = A\cdot B + C\cdot D + A\cdot D + B\cdot C$

CD \ AB	00	01	11	10
00	(0)	(4)	1 (12)	(8)
01	(1)	(5)	1 (13)	1 (9)
11	1 (3)	1 (7)	1 (15)	1 (11)
10	(2)	1 (6)	1 (14)	(10)

Ejemplos

- Minimizar $F(A,B,C,D,E) = \sum m(2, 4, 6, 10, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 24, 25, 26, 29)$

A = 0

DE \ BC	00	01	11	10
00	(0)	1 (4)	1 (12)	(8)
01	(1)	(5)	1 (13)	(9)
11	(3)	(7)	(15)	(11)
10	1 (2)	1 (6)	1 (14)	1 (10)

A = 1

DE \ BC	00	01	11	10
00	1 (16)	(20)	(28)	1 (24)
01	1 (17)	(21)	1 (29)	1 (25)
11	(19)	(23)	(31)	(27)
10	1 (18)	(22)	(30)	1 (26)

$F(A,B,C,D,E) = A.C'.D' + C'.D.E' + A'.C.E' + B.C.D'.E$

Ejemplos

- Reducir
  $F(A,B,C,D,E,F) = \prod M(5,7,10,11,21,23,26,27,37,42,43,48,49,50,51,58,59)$

  $F(A,B,C,D,E,F) = (C'+D+E')\cdot(A'+B'+C+D)\cdot(A+C+D'+F')\cdot(B+C+D'+E+F')$

A = 0, B = 0

EF \ CD	00	01	11	10
00	(0)	(4)	(12)	(8)
01	(1)	0 (5)	(13)	(9)
11	(3)	0 (7)	(15)	0 (11)
10	(2)	(6)	(14)	0 (10)

A = 1, B = 0

EF \ CD	00	01	11	10
00	(32)	(36)	(44)	(40)
01	(33)	0 (37)	(45)	(41)
11	(35)	(39)	(47)	0 (43)
10	(34)	(38)	(46)	0 (42)

A = 0, B = 1

EF \ CD	00	01	11	10
00	(16)	(20)	(28)	(24)
01	(17)	0 (21)	(29)	(25)
11	(19)	0 (23)	(31)	0 (27)
10	(18)	(22)	(30)	0 (26)

A = 1, B = 1

EF \ CD	00	01	11	10
00	0 (48)	(52)	(60)	(56)
01	0 (49)	(53)	(61)	(57)
11	0 (51)	(55)	(63)	0 (59)
10	0 (50)	(54)	(62)	0 (58)

Ejemplos

- Minimizar $F(A,B,C,D) = \sum_{A,B,C,D}(0,2,4,5,10,11,13,15)$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01		1	1	
11			1	1
10	1			1

$F = A'\cdot C'\cdot D' + B\cdot C'\cdot D + A\cdot C\cdot D + B'\cdot C\cdot D'$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01		1	1	
11			1	1
10	1			1

$F = A'\cdot B'\cdot D' + A'\cdot B\cdot C' + A\cdot B\cdot D + A\cdot B'\cdot C$

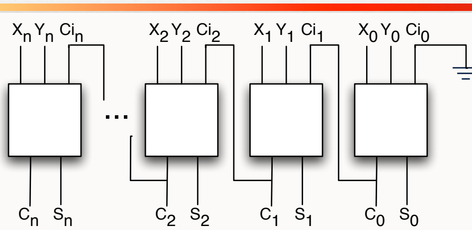
Problema de Votación

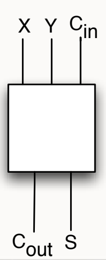
- Un comité de cuatro miembros (A, B, C y D) debe tomar decisiones por mayoría simple. En caso de empate, el voto del presidente del comité (A) es decisivo. Hallar una función lógica mínima que valga 1 cuando el voto sea aprobatorio, y 0 en caso contrario.

CD \ AB	00	01	11	10
00			1	
01			1	1
11		1	1	1
10			1	1

$V = A\cdot B + A\cdot C + A\cdot D + B\cdot C\cdot D$

Sumador Completo





X	Y	C_{in}	C_{out}	S
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

C_{in} \ XY	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

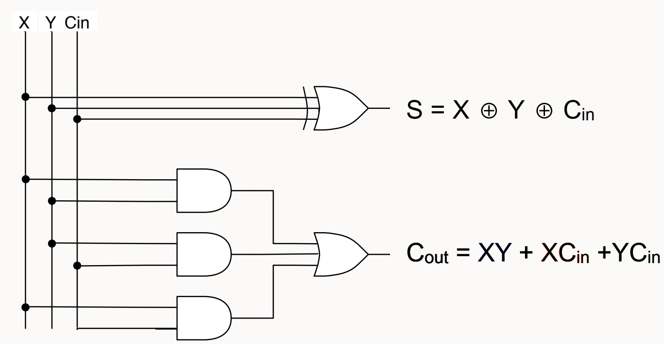
$S = X'\cdot Y'\cdot C_{in} + X'\cdot Y\cdot C'_{in} + X\cdot Y'\cdot C'_{in} + X\cdot Y\cdot C_{in}$

$S = X \oplus Y \oplus C_{in}$

C_{in} \ XY	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

$C_{out} = XY + XC_{in} + YC_{in}$

Sumador Completo



Convertidor de Binario a Código Gray de 4 bits

B_3	B_2	B_1	B_0	G_3	G_2	G_1	G_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0

$G_3 = B_3$

Convertidor de Binario a Código Gray de 4 bits

B_3	B_2	B_1	B_0	G_3	G_2	G_1	G_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0

B_1B_0 \ B_3B_2	00	01	11	10
00		1		1
01		1		1
11		1		1
10		1		1

G_2

Convertidor de Binario a Código Gray de 4 bits

B_3	B_2	B_1	B_0	G_3	G_2	G_1	G_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0

B_1B_0 \ B_3B_2	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11	1			1
10	1			1

G_1

Convertidor de Binario a Código Gray de 4 bits

B_3	B_2	B_1	B_0	G_3	G_2	G_1	G_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0

B_1B_0 \ B_3B_2	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11				
10	1	1	1	1

G_0

Convertidor de Binario a Código Gray de 4 bits

G_2

B_1B_0 \ B_3B_2	00	01	11	10
00		1		1
01		1		1
11		1		1
10		1		1

G_1

B_1B_0 \ B_3B_2	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11	1			1
10	1			1

G_0

B_1B_0 \ B_3B_2	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11				
10	1	1	1	1

$G_3 = B_3$

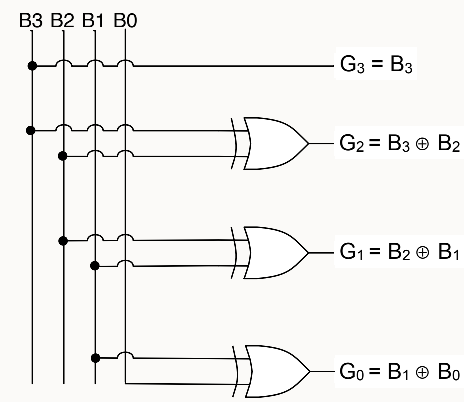
$G_2 = B'_3B_2 + B_3B'_2 = B_3 \oplus B_2$

$G_1 = B_2B'_1 + B'_2B_1 = B_2 \oplus B_1$

$G_0 = B'_1B_0 + B_1B'_0 = B_1 \oplus B_0$

$G_k = B_{k+1} \oplus B_k$

Convertidor de Binario a Código Gray de 4 bits



Convertidor de Código Gray de 4 bits a Binario

G_3	G_2	G_1	G_0	B_3	B_2	B_1	B_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1	0

$B_3 = G_3$

Convertidor de Código Gray de 4 bits a Binario

G_3	G_2	G_1	G_0	B_3	B_2	B_1	B_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1	0

G_1G_0 \ G_3G_2	00	01	11	10
00		1		1
01		1		1
11		1		1
10		1		1

B_2

Convertidor de Código Gray de 4 bits a Binario

G_3	G_2	G_1	G_0	B_3	B_2	B_1	B_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1	0

G_1G_0 \ G_3G_2	00	01	11	10
00		1		1
01		1		1
11	1		1	
10	1		1	

B_1

Convertidor de Código Gray de 4 bits a Binario

G_3	G_2	G_1	G_0	B_3	B_2	B_1	B_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1	0

G_1G_0 \ G_3G_2	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11		1		1
10	1		1	

B_0

Convertidor de Código Gray de 4 bits a Binario

G_1G_0 \ G_3G_2	00	01	11	10
00		1		1
01		1		1
11		1		1
10		1		1

B_2

G_1G_0 \ G_3G_2	00	01	11	10
00		1		1
01		1		1
11	1		1	
10	1		1	

B_1

G_1G_0 \ G_3G_2	00	01	11	10
00		1		1
01	1		1	
11		1		1
10	1		1	

B_0

$B_3 = G_3$

$B_2 = G'_3G_2 + G_3G'_2 = G_3 \oplus G_2$

$B_1 = G'_3G_2G'_1 + G_3G'_2G'_1 + G'_3G'_2G_1 + G_3G_2G_1 = G_3 \oplus G_2 \oplus G_1$

$B_0 = G_3 \oplus G_2 \oplus G_1 \oplus G_0$

$B_k = G_{n-1} \oplus G_{n-2} \oplus \ldots \oplus G_k$

Convertidor de Código Gray de 4 bits a Binario